2	Systèmes d'équations

▶ **Méthode 1 :** substitution

Nous allons résoudre le système suivant par la méthode de substitution :

$$\begin{cases} 2x - y = 6 \\ x + y = 6 \end{cases}$$

La deuxième équation du système nous donne la valeur d'une variable en fonction de l'autre :

$$y = 6 - x$$

On introduit ce résultat dans la première équation :

$$2x - \underbrace{(6 - x)}_{y} = 6 \quad \Longrightarrow \quad 3x = 12 \quad \Longrightarrow \quad \underline{\underline{x = 4}}$$

La première variable étant trouvée, il ne reste plus qu'à calculer la deuxième :

$$y = 6 - x \quad \Longrightarrow \quad y = 6 - 4 \quad \Longrightarrow \quad \underline{\underline{y = 2}}$$

▶ **Méthode 2 :** combinaisons linéaires

Cette méthode consiste à multiplier chaque ligne par un facteur, puis additionner les lignes :

$$\begin{cases} 2x - y = 6 \\ x + y = 6 \end{cases} \left| \begin{array}{l} \cdot 1 \\ \cdot (-2) \end{array} \right. \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} 2x - y = 6 \\ -2x - 2y = -12 \end{cases} \Big| + \quad \Longrightarrow \quad -3y = -6$$

Le but est de supprimer une variable. On trouve alors la valeur d'une variable, puis de l'autre :

$$\underline{\underline{y = 2}} \quad \Longrightarrow \quad x + 2 = 6 \quad \Longrightarrow \quad \underline{\underline{x = 4}}$$

▶ **Méthode 3 :** Cramer

La méthode de Cramer considère les coefficients du système :

$$\begin{cases} 2 \cdot x + (-1) \cdot y = 6 \\ 1 \cdot x + 1 \cdot y = 6 \end{cases}$$

Elle nécessite le calcul préalable de trois déterminants :

$$D = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot 1 - 1 \cdot (-1) = 3$$

$$D_x = \begin{vmatrix} 6 & -1 \\ 6 & 1 \end{vmatrix} = 6 \cdot 1 - 6 \cdot (-1) = 12$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 6 \end{vmatrix} = 2 \cdot 6 - 1 \cdot 6 = 6$$

Les solutions du système (si elles existent) sont alors données directement par :

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{12}{3} = \underline{\underline{4}} \qquad y = \frac{D_y}{D} = \frac{6}{3} = \underline{\underline{2}}$$

Exercice 1 Résoudre par substitution :

a) $\begin{cases} 2x+5y-2=0 \\ 4x+7y-4=0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x+y+5=0 \\ 4x-y=0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 3x+7y-1=0 \\ x+2y-1=0 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 2x=3y-6 \\ 4x-5y+9=0 \end{cases}$

Exercice 2 Résoudre par combinaison linéaire :

a) $\begin{cases} 3x+y-12=0 \\ 2x-5y+9=0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2x-y+3=0 \\ 3x-\frac{3}{2}y+5=0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 7y+27=5x \\ 6y+4x=10 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 3x-2y+1=0 \\ 5x-\frac{10}{3}y+\frac{5}{3}=0 \end{cases}$

Exercice 3 Résoudre par les formules de Cramer :

a) $\begin{cases} 3x+6y-5=0 \\ 6x-3y=0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 8x+9y-2=0 \\ 3x-y-27=0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 4x-2y+7=0 \\ 3x-5y-2=0 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x+\frac{2}{3}y=7 \\ x-y=2 \end{cases}$

Exercice 4 Résoudre par une méthode à choix :

a) $\begin{cases} \frac{x}{3}+\frac{y}{2}=\frac{5}{12} \\ x-\frac{3y}{4}=\frac{1}{4} \end{cases}$

c) $\begin{cases} \frac{x+y}{2}-y=\frac{1}{2} \\ 2x-\frac{x-y}{2}+\frac{5}{2}=0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} \frac{x-1}{2}+\frac{y-2}{4}=1 \\ \frac{x-3}{3}-\frac{y+2}{2}=-2 \end{cases}$

d) $\begin{cases} \frac{x+2y-4}{4}=x-1 \\ x+1-\frac{y-2}{2}=\frac{x}{4}+\frac{y}{3} \end{cases}$

Exercice 5 Résoudre par une méthode à choix :

a) $\begin{cases} 9x-5y-3z=2 \\ -2x+3y+z=8 \\ 5x+2y+2z=14 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x+y+z=2 \\ x-3y-5z=4 \\ 2x+2y-z=1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x+y+z=136 \\ x+3y+z=204 \\ x+y+4z=272 \end{cases}$

e) $\begin{cases} 2x+y+3z=2 \\ 3x-\frac{y+x}{2}+\frac{7}{3}=0 \\ \frac{x}{2}+\frac{8}{3}=2(y-x) \end{cases}$

c) $\begin{cases} \frac{x}{3}+z=0 \\ \frac{x}{6}-\frac{y}{10}-2z=0 \\ \frac{2x}{3}+\frac{3y}{5}-z=6 \end{cases}$

f) $\begin{cases} x+y+z=2 \\ 2x-2y-z=1 \\ 3x+y=0 \end{cases}$